ECOLE SUPERIEURE DE GESTION

ETABLISSEMENT RECONNU PAR L'ETAT - DIPLOME HOMOLOGUE PAR L'ETAT

CONCOURS FORMULE GENERALE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES II

DUREE : 3 HEURES COEFFICIENT : 2

VENDREDI 6 MAI 1994 DE 16 H A 19 H

Aucun document n'est autorisé. Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats et à donner des démonstrations complètes de leurs affirmations.

EXERCICE 1 (4 points)

Soit k un entier ($k > 0$) et soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad U_n = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{n} \left(\frac{i}{n+1}\right)^k$$

1) Déterminer la limite de cette suite pour :

$k = 1$ puis $k = 2$ puis $k = 3$

2) Pour k quelconque déterminer la limite de la suite

EXERCICE 2 (8 points)

Soit n un entier naturel ($n > 1$). On considère E_n l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Soit M une matrice de E_n vérifiant les propriétés suivantes

$M^2 + M = 6I$ et $\forall k \in \mathbb{R} \quad M \neq kI$

I étant la matrice élément neutre de E_n muni de la multiplication des matrices.

1) Déterminer la dimension du sous espace vectoriel E_n' de E_n engendré par les matrices M et I

2) Soit F le sous ensemble de E_n' formé des matrices N telles $N^2 = N$

a) Déterminer les éléments de F
b) Démontrer que $\forall N \in$ Fet $\forall N' \in$ F le produit N N' appartient à F
c) Quelles sont les matrices de F qui sont inversibles ?

3) Soit $A \in E_{n+1}$ on pose $A = (a_{ij})$

On suppose que pour tout couple d'entiers (i j) tels que $1 \leq i \leq n+1$ et $1 \leq j \leq n+1$

$$a_{ij} = \frac{1}{2^n} C_n^{i-1} \quad \text{où} \quad C_n^{i-1} = \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i+1)!}$$

a) Calculer A^2
b) Démontrer que A n'est pas inversible
c) Déterminer les valeurs propres de A.
On admettra qu'il existe deux valeurs propres distinctes.

EXERCICE 3 (8 points)
Un marchand de téléviseurs reçoit 2n téléviseurs (n > 1), n téléviseurs couleurs et n téléviseurs noirs et blancs.
Il les controle un à un en les choisissant au hasard et sans remise. On suppose l'équiprobabilité des choix .
Soit X_n la variable aléatoire égale au rang d'apparition du dernier téléviseur couleur contrôlé.

1) n = 2
Déterminer la loi de la probabilité de X_2 et calculer l'espérance mathématique de X_2 et la variance de X_2

2) n étant quelconque
Déterminer la loi de la probabilité de X_n et calculer l'éspérance mathématique de X_n et la variance de X_n

3) Chaque téléviseur couleur a une probabilité p_1 d'être défectueux. Chaque téléviseur noir et blanc a une probabilité $1 - p_1$ d'être défectueux.
On suppose que $0 < p_1 < 1$
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de téléviseurs couleurs défectueux.
Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de téléviseurs noirs et blancs défectueux.
Les variables Y et Z sont indépendantes

a) Déterminer la loi de la probabilité de Y + Z
b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de Y + Z

c) On suppose n = 2 et $p_1 = \frac{1}{4}$

Calculer pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 4$ la probabilité de l'évènement Y + Z = k